LIBRIS | We know books

Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

- Modalităţi de lucru diferenţiate
- Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea I

8

Ediţia a VI-a

Editura Paralela 45

LIBRIS | We know books

Cuprins

TESTE DE EVALUARE INIȚIALĂ 5

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

Lecția 1. Mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor 8
Lecția 2. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor 11
Lecția 3. Operații cu intervale de numere reale 15
Lecția 4. Inecuații de forma $ax + b > 0$ ($\geq$, $<$, $\leq$), $x, a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ 19
Teste de evaluare sumativă 25
Fișă pentru portofoliul elevului 27

CAPITOLUL II. CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

Lecția 5. Numere reale reprezentate prin litere. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere 29
Lecția 6. Înmulțirea numerelor reale reprezentate prin litere 34
Lecția 7. Împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere 38
Lecția 8. Ridicarea la putere cu exponent natural a numerelor reale reprezentate prin litere 42
Teste de evaluare sumativă 44
Fișă pentru portofoliul elevului 46
Lecția 9. Formule de calcul prescurtat 48
Lecția 10. Descompunerea în factori 54
Teste de evaluare sumativă 58
Fișă pentru portofoliul elevului 59
Probleme din realitatea cotidiană 61
Lecția 11. Fracții algebrice 63
Lecția 12. Amplificarea fracțiilor algebrice 66
Lecția 13. Simplificarea fracțiilor algebrice 70
Teste de evaluare sumativă 74
Fișă pentru portofoliul elevului 75

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

Lecția 1. Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea dreptei 77
Lecția 2. Determinarea planului. Relații între puncte, drepte și plane 80
Lecția 3. Tetraedrul și piramida 84
Lecția 4. Prisma 89
Lecția 5. Cilindrul circular drept. Conul circular drept 95
Teste de evaluare sumativă 101
Fișă pentru portofoliul elevului 102
Lecția 6. Poziția relative a două drepte în spațiu. Drepte paralele 104
Lecția 7. Unghiul a două drepte în spațiu 107
Lecția 8. Poziția relative ale unei drepte față de un plan. Dreaptă paralelă cu un plan 112
Lecția 9. Dreaptă perpendiculară pe un plan. Distanța de la un punct la un plan 116
Lecția 10. Înălțimea piramidei. Apotema piramidei 121
Lecția 11. Înălțimea conului circular drept 126

Teste de evaluare sumativă 130
Fișă pentru portofoliul elevului 132
Lecția 12. Pozițiile relative a două plane. Plane paralele 134
Lecția 13. Distanța dintre două plane paralele. Înălțimea prismei. Înălțimea cilindrului circular drept 138
Lecția 14. Secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate 143
Lecția 15. Trunchiul de piramidă regulată 147
Lecția 16. Trunchiul de con circular drept 152
Teste de evaluare sumativă 157
Fișă pentru portofoliul elevului 159
Probleme din realitatea cotidiană 161

MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA CUNOȘTINȚELOR 165

MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ 168

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI 176

LIBRIS | We know books

Teste de evaluare inițială

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(0,5p) **1.** Stabiliți care dintre următoarele propoziții este adevărată:

A. $-\sqrt{25} \in \mathbb{N}$; B. $-\sqrt{25} \in \mathbb{Z}$; C. $-\sqrt{25} \notin \mathbb{Q}$; D. $-\sqrt{25} \in \mathbb{I}$.

(0,5p) **2.** Opusul numărului rațional $\frac{8}{5}$ este numărul rațional:

A. $-\frac{8}{5}$; B. $\frac{5}{8}$; C. $\frac{8}{5}$; D. $-\frac{5}{8}$.

(0,5p) **3.** Media aritmetică a numerelor naturale 3 și 6 este egală cu:

A. 5; B. 2,5; C. 4,5; D. 7.

(0,5p) **4.** Soluția ecuației $x^2 = 8$, $x \in \mathbb{R}$, este:

A. $\{-2, 4\}$; B. $\left\{-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right\}$; C. $\left\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right\}$; D. $\{-4, 2\}$.

(0,5p) **5.** Dintre numerele raționale pozitive 0,(32), 0,33, 0,3(2) și 0,32, cel mai mare este:

A. 0,3(2); B. 0,32; C. 0,33; D. 0,(32).

(0,5p) **6.** Rezultatul calculului $(2\sqrt{5}) : \sqrt{10} - \sqrt{2}$ este egal cu:

A. 0; B. $\sqrt{2}$; C. $\sqrt{5}$; D. 3.

(0,5p) **7.** În triunghiul ABC notăm cu M și N mijloacele laturilor AB, respectiv AC. Dacă $MN = 7$ cm, atunci BC este egală cu:

A. 21 cm; B. 3,5 cm; C. 5,5 cm; D. 14 cm.

(0,5p) **8.** Într-o urnă sunt 6 bile albe și 9 bile negre. Extrăgând o bilă, probabilitatea ca aceasta să fie albă este egală cu:

A. $\frac{1}{6}$; B. $\frac{2}{5}$; C. $\frac{3}{4}$; D. $\frac{1}{9}$.

(0,5p) **9.** Distanța dintre punctele $A(3; 0)$ și $B(1; 2\sqrt{3})$ exprimată în centimetri este:

A. $\sqrt{2}$ cm; B. 6 cm; C. 4 cm; D. $\sqrt{3}$ cm.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

(0,8p) **1.** Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$, unde x și y sunt numere reale.

2. Se consideră numărul real $x = \left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right) : 2,(6) - \sqrt{\frac{2}{3}}$.

(0,7p) a) Arătați că $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$. *(0,8p)* b) Calculați $m_a(x; x^{-1})$.

3. Notăm cu $\mathcal{A}_d$ aria discului mărginit de cercul $\mathcal{C}(I, r)$ înscris în triunghiul ABC. Știind că $\sphericalangle BAC = 90°$, $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm, calculați:
(0,7p) a) $\mathcal{P}_{ABC}$; *(0,8p)* b) r; *(0,7p)* c) $\mathcal{A}_d$.

Testul 2

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(0,5p) **1.** Stabiliți care dintre următoarele propoziții este adevărată:
A. $\sqrt{0,(1)} \in \mathbb{N}$; B. $\sqrt{0,(1)} \in \mathbb{Z}$; C. $\sqrt{0,(1)} \in \mathbb{Q}$; D. $\sqrt{0,(1)} \in \mathbb{I}$.

(0,5p) **2.** Rezultatul calculului $\sqrt{9} - \sqrt{16}$ este egal cu:
A. 1; B. –1; C. 7; D. –7.

(0,5p) **3.** Între mulțimile $E = \{0, 1, 2\}$ și $F = \{0, 3, 6\}$ se stabilește o dependență funcțională aplicând regula:
A. $x \to x^2$; B. $x \to 3x$; C. $x \to 2x$; D. $x \to x^3$.

(0,5p) **4.** Media geometrică a numerelor 9 și 25 este egală cu:
A. 12; B. 16; C. 24; D. 15.

(0,5p) **5.** Rotunjirea la a doua zecimală a numărului 3,(5) este egală cu:
A. 3,66; B. 3,65; C. 3,56; D. 3,55.

(0,5p) **6.** Știind că $5\sqrt{3} = \sqrt{n}$, atunci n este egal cu:
A. 50; B. 45; C. 75; D. 80.

(0,5p) **7.** Știind că $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, atunci măsura unghiului A este egală cu:
A. 30°; B. 45°; C. 60°; D. 90°.

(0,5p) **8.** Dintre numerele $4\sqrt{5}$, $5\sqrt{3}$, $6\sqrt{2}$ și $7\sqrt{2}$, cel mai mic este:
A. $6\sqrt{2}$; B. $4\sqrt{5}$; C. $5\sqrt{3}$; D. $7\sqrt{2}$.

(0,5p) **9.** Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $AB = 8$ cm, $BC = 12$ cm, $CA = 16$ cm și $DE = 2$ cm, atunci $\mathcal{P}_{DEF}$ este egal cu:
A. 6 cm; B. 9 cm; C. 8 cm; D. 7 cm.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

(0,8p) **1.** Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația $\frac{x-1}{3} + 2 = 1\frac{1}{4}$.

2. Se consideră mulțimile $A = \{-1, 3\}$ și $B = \{-2, 2\}$.
(0,7p) a) Determinați mulțimea $A \times B$.
(0,8p) b) Determinați aria patrulaterului ale cărui vârfuri sunt reprezentările grafice ale elementelor mulțimii $A \times B$ în sistemul de axe ortogonale xOy.

3. În paralelogramul $ABCD$ cu $\sphericalangle A = 150°$, $AB = 12$ cm și $BC = 10$ cm construim înălțimile AE, $E \in BC$ și AF, $F \in CD$. Calculați:
(0,7p) a) AE și AF; *(0,7p)* b) $\mathcal{A}_{ABCD}$; *(0,8p)* c) $\mathcal{A}_{AEF}$.

Testul 3

LIBRIS We know books

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Scrieţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(0,5p) **1.** Stabiliţi care dintre următoarele propoziţii este adevărată:

A. $\sqrt{0,5} \in \mathbb{N}$; B. $\sqrt{0,5} \in \mathbb{Z}$; C. $\sqrt{0,5} \in \mathbb{Q}$; D. $\sqrt{0,5} \in \mathbb{I}$.

(0,5p) **2.** Inversul numărului real $-\frac{1}{7}$ este egal cu:

A. $-\frac{1}{7}$; B. -7; C. 7; D. $\frac{1}{7}$.

(0,5p) **3.** Rezultatul calculului $0,(6) - 1$ este egal cu:

A. $-\frac{2}{3}$; B. $\frac{1}{3}$; C. $\frac{5}{6}$; D. $-\frac{1}{3}$.

(0,5p) **4.** Reprezentând punctul $A(-2; 5)$ în sistemul de axe ortogonale xOy, acesta aparţine cadranului:

A. IV; B. II; C. I; D. III.

(0,5p) **5.** Soluţia ecuaţiei $\sqrt{5}\,x + 3 = 8$, $x \in \mathbb{R}$, este egală cu:

A. $\sqrt{5}$; B. $-\sqrt{5}$; C. $-\sqrt{3}$; D. $\sqrt{3}$.

(0,5p) **6.** Raţionalizând numitorul raportului $\frac{2}{\sqrt{6}}$, obţinem raportul:

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$; B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$; C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$; D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

(0,5p) **7.** Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$. Dacă $AB = 9$ cm şi $CD = 13$ cm, atunci linia mijlocie a trapezului are lungimea de:

A. 10 cm; B. 11 cm; C. 14 cm; D. 17 cm.

(0,5p) **8.** Produsul cartezian al mulţimilor $A = \{a, b\}$ şi $B = \{d\}$ este egal cu:

A. $\{(a; b), (b; a)\}$; B. $\{(a; b), (a; d)\}$;
C. $\{(a; d), (b; d)\}$; D. $\{(d; a), (d; b)\}$.

(0,5p) **9.** Aria triunghiului ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 3$ cm şi $BC = 5$ cm este egală cu:

A. 8 cm^2; B. 4 cm^2; C. 9 cm^2; D. 6 cm^2.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

(0,8p) **1.** Aflaţi lungimea segmentului AB dacă $A(-1; \sqrt{3})$ şi $B(2; -2\sqrt{3})$.

2. Se dau numerele $x = \left(\frac{7}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^3$ şi $y = \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) : \frac{5}{6}$.

(0,7p) a) Arătaţi că $y = \sqrt{6}$; *(0,8p)* b) Calculaţi $m_g(x; y)$.

3. În pătratul $ABCD$ cu latura de 8 cm considerăm punctul E situat pe latura AB, astfel încât $BE = 6$ cm. Calculaţi:

(0,7p) a) $\mathcal{A}_{ABCD}$; *(0,7p)* b) $\mathcal{P}_{EBC}$; *(0,8p)* c) $d(D, CE)$.

LIBRIS We know books

Capitolul I

INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

Lecția 1. Mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor

Citesc şi reţin

În clasa a VI-a, la capitolul „Mulţimi. Mulţimea numerelor naturale" am învăţat că o mulţime poate fi definită printr-o proprietate a elementelor acesteia.

Exemplu: $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 5\}$. Citim „Mulţimea A este formată din numerele naturale nenule n cu proprietatea $n < 5$".

Cum se aplică?

1. Enumeraţi elementele mulţimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 35 \vdots x\}$ şi precizaţi cardinalul acesteia.

Soluţie:

Divizorii întregi ai lui 35 sunt $\pm1, \pm5, \pm7, \pm35$, prin urmare $A = \{-35, -7, -5, -1, 1, 5, 7, 35\}$ şi card $A = 8$.

2. Scrieţi mulţimea $P = \{2, 3, 5, 7\}$, folosind o proprietate a elementelor acesteia.

Soluţie:

Observăm că elementele mulţimii P sunt numerele naturale prime de o cifră, prin urmare mulţimea P se scrie $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ este număr prim de o cifră$\}$.

3. Se consideră mulţimile $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^n < 5^2\}$ şi $F = \{a \mid \overline{6a2} \vdots 3\}$. Efectuaţi:

a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$.

Soluţie:

Mai întâi enumerăm elementele mulţimilor E şi F. Elementele mulţimii E îndeplinesc condiţia $2^n < 5^2$ sau $2^n < 25$, prin urmare $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Elementele mulţimii F îndeplinesc condiţia $\overline{6a2} \vdots 3$, deci $3 \mid 6 + a + 2$ sau $3 \mid 8 + a$, de unde rezultă că $F = \{1, 4, 7\}$; a) $E \cup F = \{0, 1, 2, 3, 4, 7\}$; b) $E \cap F = \{1, 4\}$; c) $E \setminus F = \{0, 2, 3\}$; d) $F \setminus E = \{7\}$.

EBRIS We know books

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi:

a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 4\} = \ldots\ldots\ldots\ldots$; b) $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 7\} = \ldots\ldots\ldots\ldots$;

c) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n < 3\} = \ldots\ldots\ldots\ldots$; d) $D = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 5\} = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

2. Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi şi precizaţi cardinalul acestora:

a) $A = \{x \mid x$ este literă a cuvântului „geometria”$\} = \ldots\ldots\ldots\ldots$;

b) $B = \{y \mid y$ este cifră a numărului „701233048”$\} = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

3. Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi şi precizaţi cardinalul acestora:

a) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\} = \ldots\ldots\ldots\ldots$;

b) $F = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| < 4\} = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

4. Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi şi precizaţi cardinalul acestora:

a) $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{n}{5} \text{ este fracţie subunitară} \right\} = \ldots\ldots\ldots\ldots$;

b) $B = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, \frac{5}{n} \text{ este fracţie supraunitară} \right\} = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

5. Se consideră mulţimile $E = \{x \mid x$ este literă a cuvântului „tetraedru”$\}$ şi $F = \{y \mid y$ este literă a cuvântului „cilindru”$\}$. Efectuaţi:

a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$.

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

6. Efectuaţi $C \cup D$, $C \cap D$, $C \setminus D$ şi $D \setminus C$ în următoarele cazuri:

a) $C = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 5\}$ şi $D = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < 3\}$;

b) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 4\}$ şi $D = \{m \in \mathbb{Z}^* \mid |m| \leq 3\}$.

7. Ştiind că $\mathcal{D}_n$ este mulţimea divizorilor naturali ai lui n, efectuaţi:

a) $\mathcal{D}_6 \cup \mathcal{D}_9$; b) $\mathcal{D}_6 \cap \mathcal{D}_9$; c) $\mathcal{D}_6 \setminus \mathcal{D}_9$; d) $\mathcal{D}_9 \setminus \mathcal{D}_6$.

8. Se consideră mulţimile $A = \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m < 4\}$ şi $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 3\}$. Efectuaţi:

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus B$; d) $B \setminus A$; e) $A \times B$; f) $B \times A$.

LIBRIS We know books

9. Arătați că $A = B$ în următoarele cazuri:

a) $A = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq 7\}$ și $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 7 - m, m \in A\}$;

b) $A = \{m \in \mathbb{N}^* \mid m < 6\}$ și $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 6 - m, m \in A\}$.

10. Se consideră mulțimile $E = \{\overline{ab}, a \neq 0 \mid \overline{ab} \vdots 15\}$ și $F = \{\overline{cd}, c \neq 0 \mid \overline{cd} \vdots 25\}$. Efectuați:

a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$.

11. Se consideră mulțimile $A = \left\{x \mid \overline{173x8} < \overline{17xx8}\right\}$ și $B = \left\{y \mid \overline{51yy3} > \overline{51y63}\right\}$. Arătați că $B \subset A$.

12. Scrieți submulțimile următoarelor mulțimi:

a) $E = \left\{x \mid \overline{807x} \vdots 4\right\}$; b) $F = \left\{y \mid \overline{14y5} \vdots 3\right\}$.

13. Se consideră mulțimile $E = \{x \mid \overline{120x} \vdots 5\}$ și $F = \{y \mid \overline{62y1} \vdots 9\}$. Efectuați:

a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$; e) $E \times F$; f) $F \times E$.

14. Se consideră mulțimea $A = \{\overline{xyz} \mid \overline{xyz} = 10n + 9, n \in \mathbb{N}, x \neq 0\}$. Determinați:

a) cel mai mic element al mulțimii A; b) cel mai mare element al mulțimii A.

15. Se consideră mulțimile $E = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} = b^2, a \neq 0\}$ și $F = \{\overline{xyz} \mid \overline{xyz} = z^3, x \neq 0\}$. Efectuați $E \times F$ și $F \times E$.

16. Se dau mulțimile $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{n+4} < 8^3\}$ și $D = \{n \in \mathbb{N} \mid 3^{n+1} < 9^3\}$. Arătați că $C = D$.

17. Se consideră mulțimile $E = \{\overline{ab}, a \neq 0 \mid (\overline{ab}; 60) = 15\}$ și $F = \{\overline{cd}, c \neq 0 \mid (75; \overline{cd}) = 15\}$. Efectuați:

a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$.

18. Se consideră mulțimile $A = \{\overline{xy}, x \neq 0 \mid [\overline{xy}; 48] = 144\}$ și $B = \{\overline{zt}, z \neq 0 \mid [60; \overline{zt}] = 180\}$. Efectuați:

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus B$; d) $B \setminus A$.

19. Se dau mulțimile $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 5^n < 2^{n+3}\}$ și $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 5^n < 3^{n+1}\}$. Arătați că $A = B$.

20. Se dă mulțimea $A = \left\{\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}, a \neq 0, b \neq 0 \,\middle|\, \frac{\overline{ab}}{\overline{ba}} = \frac{4}{7}\right\}$. Câte submulțimi are mulțimea A?

21. Se consideră mulțimile $A = \{3x - 2, x + 5, 5x + 4\}$ și $B = \{3x - 1, x + 4, 4x + 7\}$. Determinați numărul natural x, $x \geq 1$, pentru care $A = B$.

22. Se consideră mulțimea $E = \{\overline{ab} \mid \overline{ab}$ este număr prim și $\overline{ab} + \overline{ab}^3 \vdots 10, a \neq 0\}$. Determinați card E.

23. Efectuați $A \cap B$, știind că $A = \{a \mid a = 2^n + 3^{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b \mid b = 2^{n+2} + 3^n, n \in \mathbb{N}\}$.

24. Se consideră mulțimile $E = \{a \mid a = 5n - 1, n \in \mathbb{N}^*\}$ și $F = \{b \mid b = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}\}$. Arătați că $E \cap F = \varnothing$.

25. Arătați că $A = B$, știind că $A = \{a, b, c\}$ și $B = \{x, y, z\}$, iar a, b, c, x, y, z sunt numere prime care verifică condițiile: $a + x = b + y = c + z$ și $a + b + c + x + y + z = \overline{a0}$.

LIBRIS We know books

Exerciții și probleme de dificultate avansată

26. Se consideră mulțimile $A = \{a \mid a = 3p + 2, p \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b \mid b = 5q + 1, q \in \mathbb{N}\}$ și $C = \{c \mid c = 15t + 11, t \in \mathbb{N}\}$. Efectuați $C \setminus (A \cap B)$.

27. Determinați mulțimea $A = \left\{\overline{abcd} \;\middle|\; \sqrt{\overline{abcd}} + \sqrt{\overline{bcd}} + \sqrt{\overline{cd}} = 105, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0\right\}$.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 7/2007)

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Enumerați elementele următoarelor mulțimi și precizați cardinalul acestora:
a) $A = \{m \in \mathbb{N} \mid m < 6\}$; b) $B = \{n \in \mathbb{Z}^* \mid |n| \leq 4\}$.

(3p) **2.** Se consideră mulțimile $E = \left\{x \mid \overline{71x} \vdots 5\right\}$ și $F = \left\{y \mid \overline{8y5} \vdots 3\right\}$. Efectuați:
a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$; e) $E \times F$; f) $F \times E$.

(3p) **3.** Se consideră mulțimea $A = \{n \mid 3^n < 2^{n+2}\}$. Câte submulțimi are mulțimea A?

Lecția 2. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor

Citesc și reții

Definiții:

Fie a și b două numere reale, cu $a < b$. Definim:

- $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (**interval închis** de extremități a și b);
- $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (**interval deschis** de extremități a și b);
- $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (**interval deschis la stânga și închis la dreapta** de extremități a și b);
- $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (**interval închis la stânga și deschis la dreapta** de extremități a și b).

Intervalele de tipul: $[a; b]$, $(a; b)$, $(a; b]$, $[a; b)$ se numesc intervale **mărginite** și au ca reprezentare geometrică pe axa numerelor un segment, ca în figurile următoare:









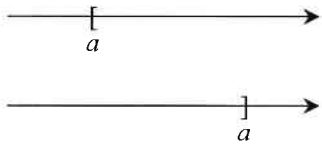
LIBRIS | We know books

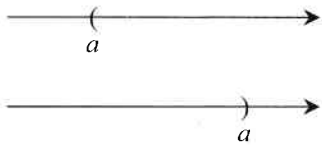
Definiţii:

Fie a un număr real. Definim:

- $[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ (interval **închis la stânga** şi **nemărginit la dreapta**);
- $(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ (interval **deschis la stânga** şi **nemărginit la dreapta**);
- $(-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ (interval **nemărginit la stânga** şi **închis la dreapta**);
- $(-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ (interval **nemărginit la stânga** şi **deschis la dreapta**).

Intervalele de tipul: $[a; +\infty)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; a]$, $(-\infty; a)$ se numesc intervale **nemărginite** şi au ca reprezentare geometrică pe axa numerelor o semidreaptă, ca în figurile următoare:





Conform definiţiei modulului, pentru $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ avem:

- $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq a\} = [-a; a]$;
- $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < a\} = (-a; a)$;
- $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq a\} = (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$;
- $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > a\} = (-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$.

Cum se aplică?

1. Scrieţi sub formă de intervale mulţimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2013\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 4\}$; d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2\}$.

Soluţie:

a) $A = [-1; 1)$; b) $B = (-\infty; -2013)$; c) $C = [-4; 4]$; d) $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

2. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $-7 \in [-7; 1)$; b) $6 \in (-2; 6)$;

c) $\{-\sqrt{5}, 8\} \subset [-\sqrt{5}; 9)$; d) $\{-1, \sqrt{2}\} \subset (-1; \sqrt{2}]$.

Soluţie:

a) A; b) F; c) A; d) F.

3. Scrieţi sub formă de interval de numere reale mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 5\sqrt{3}\}$ şi arătaţi că $-6\sqrt{2} \in A$.

Soluţie:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 5\sqrt{3}\} = [-5\sqrt{3}; 5\sqrt{3}]$. Observăm că $-5\sqrt{3} = -\sqrt{75}$ şi $-6\sqrt{2} = -\sqrt{72}$, deci $-5\sqrt{3} < -6\sqrt{2}$, prin urmare $-5\sqrt{3} < -6\sqrt{2} < 5\sqrt{3}$, de unde rezultă că $-6\sqrt{2} \in A$.

LIBRIS We know books

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Citiţi următoarele propoziţii:

a) $(-1; 8)$; b) $[0; 7]$; c) $(2; 9]$; d) $[-6; 7)$;

e) $(-\infty; 4)$; f) $(-\infty; \sqrt{2}]$; g) $(\sqrt{7}; +\infty)$; h) $[5; +\infty)$.

2. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:

a) $(-4; 5) = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 5\}$; ☐ b) $[-7; 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq x \leq 2\}$; ☐

c) $[-3; 8) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 8\}$; ☐ d) $(-6; 9] = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x \leq 9\}$. ☐

3. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:

a) $(-\infty; 13] = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 13\}$; ☐ b) $(-1; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$; ☐

c) $(-\infty; -\sqrt{3}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\sqrt{3}\}$; ☐ d) $[-\sqrt{6}; +\infty) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -\sqrt{6}\}$. ☐

4. Scrieţi sub formă de intervale mulţimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 4\} =$ .....; b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \leq x \leq 9\} =$ .....;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < 6\} =$ .....; d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \sqrt{3}\} =$ ..... .

5. Scrieţi sub formă de intervale mulţimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -17\} =$ .....; b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -23\} =$ .....;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\sqrt{2}\} =$ .....; d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\sqrt{7}\} =$ ..... .

6. Scrieţi sub formă de intervale mulţimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 15\} =$ .....; b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq -4\} =$ .....;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 31\} =$ .....; d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 0\} =$ ..... .

7. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $-2 \in [-2; 7)$; ☐ b) $3 \in (-8; 3)$; ☐ c) $-1 \notin (-1; 9]$; ☐

d) $5 \notin [-6; 5]$; ☐ e) $0 \in (-3; 0]$; ☐ f) $-4 \in (-4; 7]$. ☐

8. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\{-3, 5\} \subset [-3; 5]$; ☐ b) $\{-4, 3\} \subset (-4; 3)$; ☐

c) $\{-7, 2\} \subset [-7; 2)$; ☐ d) $\{-6, 8\} \subset (-6; 8]$. ☐

9. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $15 \in [10; 25)$; ☐ b) $23 \in [19; 22]$; ☐ c) $-8 \in (-9; 7]$; ☐ d) $-5 \notin (-4; 0)$; ☐

e) $\sqrt{2} \in (-1; 2]$; ☐ f) $\sqrt{3} \notin (-3; 1)$; ☐ g) $\sqrt{5} \in [-1; 2]$; ☐ h) $\sqrt{7} \in [-3; 3]$. ☐

10. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\frac{4}{3} \in \left[\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right]$; ☐ b) $\frac{5}{3} \in \left(\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$; ☐ c) $\frac{1}{3} \in \left(\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right]$. ☐

11. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\frac{7}{3} \in \left(\frac{7}{8}; \frac{7}{4}\right)$; ☐ b) $\frac{7}{9} \in \left[\frac{7}{8}; \frac{7}{4}\right)$; ☐ c) $\frac{7}{5} \in \left[\frac{7}{8}; \frac{7}{4}\right]$. ☐

LIBRIS we know books

12. Completați spațiile punctate cu trei elemente din intervalul $[-2; 2)$, care să aparțină mulțimii:

a) $\mathbb{Z}$; ..... b) $\mathbb{I}$; ..... c) $\mathbb{Q}$. .....

13. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții. Intervalul $(-3; 4)$ conține o infinitate de elemente care aparțin mulțimii:

a) $\mathbb{N}$; ☐ b) $\mathbb{Z}$; ☐ c) $\mathbb{Q}$; ☐ d) $\mathbb{I}$; ☐ e) $\mathbb{R}$. ☐

14. i) Completați spațiile punctate cu cel mai mare număr natural din intervalele:

a) $[-9; 5)$; ..... b) $(-3; 8]$; ..... c) $[-6; 4]$; ..... d) $(-6; 9)$. .....

ii) Completați spațiile punctate cu cel mai mic număr întreg din intervalele:

a) $(-8; -1)$; ..... b) $[-5; 0]$; ..... c) $(-9; -4]$; ..... d) $[-3; 7)$. .....

15. i) Completați spațiile punctate cu cel mai mare număr întreg care nu aparține intervalului:

a) $[52; +\infty)$; ..... b) $(87; +\infty)$; ..... c) $(-4; +\infty)$; ..... d) $[-6; +\infty)$. .....

ii) Completați spațiile punctate cu cel mai mic număr întreg care nu aparține intervalului:

a) $(-\infty; 35)$; ..... b) $(-\infty; 27]$; ..... c) $(-\infty; -8]$; ..... d) $(-\infty; -5)$. .....

Exerciții și probleme de dificultate medie

16. i) Calculați produsul dintre cel mai mic și cel mai mare număr întreg din intervalele:

a) $[-8; -2]$; b) $[-5; -3)$; c) $(-7; -4]$; d) $(-9; -6)$.

ii) Calculați suma dintre cel mai mic și cel mai mare număr întreg din intervalele:

a) $[-7; -2)$; b) $(-9; -3]$; c) $[-7; -5]$; d) $(-8; -1)$.

17. Arătați că:

a) $2\sqrt{5} \in \left(3\sqrt{2}; 2\sqrt{7}\right)$; b) $3\sqrt{3} \in \left[2\sqrt{5}; 4\sqrt{2}\right)$; c) $5\sqrt{3} \in \left(6\sqrt{2}; 4\sqrt{5}\right]$.

18. Arătați că:

a) $2^{23} \in (4^{11}; 16^6)$; b) $3^{19} \in (27^6; 9^{10})$; c) $5^{10} \in (2^{20}; 3^{15})$; d) $3^{45} \in (5^{30}; 2^{75})$.

19. Arătați că suma fracțiilor ordinare cu numitorul 3 care aparțin intervalului $[2; 4)$ este un număr natural.

20. Calculați suma fracțiilor ordinare cu numărătorul 2 care aparțin intervalului $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

21. Determninați numărul natural n pentru care următoarele propoziții sunt adevărate:

a) $2^{13} \cdot 5^8 \in (10^n; 10^{n+1})$; b) $2^{11} \cdot 5^{14} \in (10^n; 10^{n+1})$; c) $2^{16} \cdot 5^9 \in (10^n; 10^{n+1})$.

22. Arătați că:

a) $\sqrt{(x+5)^2} + \sqrt{(x-3)^2} = 8$, pentru $x \in [-5; 3]$;

b) $\sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-7)^2} = 9$, pentru $x \in [-2; 7]$.

23. Arătați că:

a) $3\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{1 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{4}{43 \cdot 45}\right) \in (7; 8)$;